第22講　体積

22

［A］ $C: x^2+(y-1)^2=4$ に関して，C を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積 V を求めよ．

［B］ xyz 空間の xy 平面上に

曲線 $C: y=x^2,\ z=0$

直線 $l: y=x+a,\ z=0\quad (a\leqq 1)$

がある．いま C と l の交点を P，Q とし，線分 PQ を底辺とする正三角形 PQR を xy 平面に垂直に作る．直線 l を $a=1$ から C に接するまで動かすとき，この正三角形が通過してできる立体の体積 V を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第22講　体積

22　y 軸上の点 C$(0,\ 1)$ に中心をもち，2 直線 $y=bx$，$y=-bx$ に接する円 C がある．ただし，$b>0$ とする．

(1)　C の方程式を求めよ．

(2)　C と $y=bx$ の接点の x 座標が最大となるときの b の値を求めよ．

(3)　C の原点側の円弧と 2 直線で囲まれた図形を x 軸のまわりに回転させる．このときの回転体の体積 V を求めよ．ただし，b は(2)で得られた値を用いよ．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 22 講　体積

22

［A］　$C：x^2+(y-1)^2=4$ に関して，C を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積 V を求めよ．

［B］　xyz 空間の xy 平面上に

$$\text{曲線 } C：y=x^2,\ z=0$$

$$\text{直線 } l：y=x+a,\ z=0 \quad (a\leqq 1)$$

がある．いま C と l の交点を P，Q とし，線分 PQ を底辺とする正三角形 PQR を xy 平面に垂直に作る．直線 l を $a=1$ から C に接するまで動かすとき，この正三角形が通過してできる立体の体積 V を求めよ．

【答】［A］ $\dfrac{2(9\sqrt{3}+8\pi)\pi}{3}$

［B］ $\dfrac{25\sqrt{6}}{32}$

【解説】

［A］　$x^2+(y-1)^2=4$ を y について解くと $y=1\pm\sqrt{4-x^2}$ となる．ここで，この円は y 軸に関して対称であり，$y=0$ とすると $x=\pm\sqrt{3}$ であることより，求める体積 V は

$$V=2\left\{\int_0^2\pi(1+\sqrt{4-x^2})^2dx-\int_{\sqrt{3}}^2\pi(1-\sqrt{4-x^2})^2dx\right\}$$

$$=2\pi\left\{\int_0^2(5-x^2+2\sqrt{4-x^2})dx-\int_{\sqrt{3}}^2(5-x^2-2\sqrt{4-x^2})dx\right\}$$

$$=2\pi\left\{\int_0^{\sqrt{3}}(5-x^2)dx+2\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx+2\int_{\sqrt{3}}^2\sqrt{4-x^2}\,dx\right\}$$

$$=2\pi\left\{\int_0^{\sqrt{3}}(5-x^2)dx+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\sin^2\theta}\cdot 2\cos\theta\,d\theta+2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\sin^2\theta}\cdot 2\cos\theta\,d\theta\right\}$$

$$=2\pi\left\{\int_0^{\sqrt{3}}(5-x^2)dx+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}2(1+\cos 2\theta)d\theta+2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}2(1+\cos 2\theta)d\theta\right\}$$

$$=2\pi\left\{\left[5x-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}}+2\Big[2\theta+\sin 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+2\Big[2\theta+\sin 2\theta\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\right\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{2(9\sqrt{3}+8\pi)\pi}{3}}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

［B］ C と l が接するときは

$$x^2=x+a \iff x^2-x-a=0$$

が重解をもつときなので，

$$(-1)^2-4\times(-a)=0 \qquad \therefore \quad a=-\frac{1}{4}$$

ここで題意の立体は，$z=0$ における $y=-x$ 上の

点 $\mathrm{H}\left(-\dfrac{u}{\sqrt{2}},\ \dfrac{u}{\sqrt{2}},\ 0\right)$ $\left(-\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\leqq u\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ を通り，

$y=-x$ に垂直な平面で切った切り口は正三角形となり，H が l 上のとき

$$\frac{u}{\sqrt{2}}=-\frac{u}{\sqrt{2}}+a \qquad \therefore \quad a=\sqrt{2}\,u$$

よって

$$V=\int_{-\frac{1}{4\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{PQ}^2\,du$$

P，Q の x 座標をそれぞれ α，β とすると

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2&=\{\sqrt{2}\,|\alpha-\beta|\}^2\\&=2(\alpha-\beta)^2\\&=2(4a+1)\end{aligned}$$

であるので

$$\begin{aligned}V&=\int_{-\frac{1}{4}}^{1}\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot2(4a+1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\,da\\&=\int_{-\frac{1}{4}}^{1}\frac{\sqrt{6}}{4}(4a+1)\,da\\&=\left[\frac{\sqrt{6}}{32}(4a+1)^2\right]_{-\frac{1}{4}}^{1}\\&=\boldsymbol{\frac{25\sqrt{6}}{32}}\end{aligned}$$

第 22 講　体積

22　y 軸上の点 C(0, 1) に中心をもち，2 直線 $y=bx$，$y=-bx$ に接する円 C がある．ただし，$b>0$ とする．
(1)　C の方程式を求めよ．
(2)　C と $y=bx$ の接点の x 座標が最大となるときの b の値を求めよ．
(3)　C の原点側の円弧と 2 直線で囲まれた図形を x 軸のまわりに回転させる．このときの回転体の体積 V を求めよ．ただし，b は(2)で得られた値を用いよ．

【答】 (1) $x^2+(y-1)^2=\dfrac{1}{b^2+1}$　(2) $b=1$　(3) $V=\dfrac{(10-3\pi)\pi}{12}$

【解説】

(1)　C の半径は，$bx-y=0$ と点 C(0, 1) との距離

$$\frac{|b\times 0-1|}{\sqrt{b^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{b^2+1}}$$

と等しいので

$$C : \boldsymbol{x^2+(y-1)^2=\frac{1}{b^2+1}}$$

(2)　C と $y=bx$ との接点を P とすると，

$$\mathrm{CP}\perp\mathrm{OP}$$

より P は OC を直径とする円周上の点となるので，x 座標が最大となる点は

$$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

ゆえに

$$\boldsymbol{b=1}$$

(3)

$$x^2+(y-1)^2=\frac{1}{2}\iff y=1\pm\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}$$

より，原点側の円弧は　$y=1-\sqrt{\dfrac{1}{2}-x^2}$

求める体積を V とおくと，もとの図形は y 軸に関して対称なので，

$$\frac{V}{2}=\int_0^{\frac{1}{2}}\pi\left(1-\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}\right)^2dx-\left(\frac{1}{2}\right)^2\pi\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$$

$$=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2}-x^2-2\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}\right)dx-\frac{1}{24}\pi$$

$$=\pi\left[\frac{3}{2}x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{2}}-2\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}\,dx-\frac{1}{24}\pi$$

$$=\frac{17}{24}\pi-2\pi\times\frac{\pi+2}{16}-\frac{1}{24}\pi$$

$$=\frac{(10-3\pi)\pi}{24}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

ゆえに,

$$V=\frac{(10-3\pi)\pi}{12}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。